力学ICD演習解答例
演習8

1．　ベクトル積の微分に関する式(5-1-6)を証明せよ。

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\dot{\mathbf{B}} \qquad \text{(5-1-6)}$$

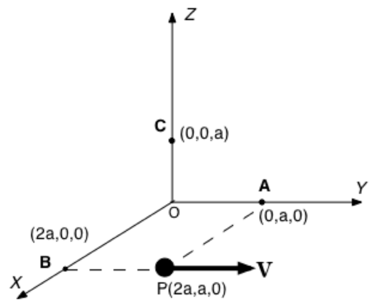
(hint)　左辺のx成分は $\left[\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\right]_x = \frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_x$ を計算すれば良い。これが右辺のx成分になることを示す。他の成分も同様。

（解答例） $\left[\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\right]_x = \frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_x = \frac{d}{dt}(A_yB_z - A_zB_y) = \dot{A}_yB_z + A_y\dot{B}_z - \dot{A}_zB_y - A_z\dot{B}_y$

$$= (\dot{A}_yB_z - \dot{A}_zB_y) + (A_y\dot{B}_z - A_z\dot{B}_y) = (\dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{B})_x + (\mathbf{A}\times\dot{\mathbf{B}})_x$$

他の成分についても同様なので、与式は証明された。

2.．角運動量は $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ で定義されるので、位置ベクトル $\mathbf{r}$ の基準点を変えると $\mathbf{L}$ の値も変わる。これを、その基準点のまわりの角運動量、という言い方をする場合がある。いま、ある時刻において、質量 m の質点が右図のように xy 平面上の点$P(2a,a,0)$にあり、y軸と平行に速度 $\mathbf{v}$ で走っていたとする。基準点として、原点O, A点(0, a, 0), B点(2a, 0, 0), C点(0, 0, a) を選んだ時、それらの点のまわりの角運動量$\mathbf{L}_0$, $\mathbf{L}_A$, $\mathbf{L}_B$, $\mathbf{L}_C$をそれぞれ求めよ（それぞれの向きと大きさを求める）。



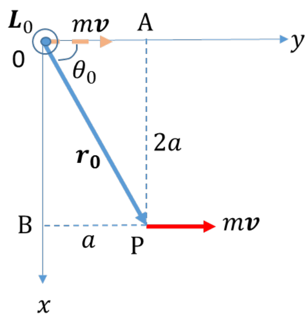
（解答例）

(1) 原点0のまわり角運動量 $\mathbf{L}_0$

この時、$\mathbf{L}_0$は右図のように原点からP点まで引いた位置ベクトル ($\mathbf{r}_0$)と運動量ベクトル $m\mathbf{v}$ とのベクトル積、 $\mathbf{L}_0 = \mathbf{r}_0\times m\mathbf{v}$

向き：z軸正の向き ⊙

大きさ：$|\mathbf{L}_0| = |\mathbf{r}_0||m\mathbf{v}|\sin\theta_0 = (|\mathbf{r}_0|\sin\theta_0)m|\mathbf{v}| = 2amv$



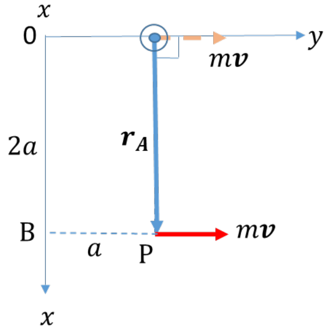
(2) A点のまわり角運動量 $\mathbf{L}_A$

この場合は、位置ベクトル $\mathbf{r}_A$ は右図のようにとる。

$\mathbf{L}_A = \mathbf{r}_A\times m\mathbf{v}$ なので、

向き：z軸正の向き ⊙

大きさ：$|\mathbf{L}_A| = |\mathbf{r}_A||m\mathbf{v}|\sin 90 = |\mathbf{r}_A|m|\mathbf{v}| = 2amv$



(3) B点のまわり角運動量 $\mathbf{L}_B$

B点からP点まで引いた位置ベクトル$\mathbf{r}_B$ は $m\mathbf{v}$ と平行なので、

$\mathbf{L}_B = 0$

(4) C点のまわり角運動量 $\mathbf{L}_C$

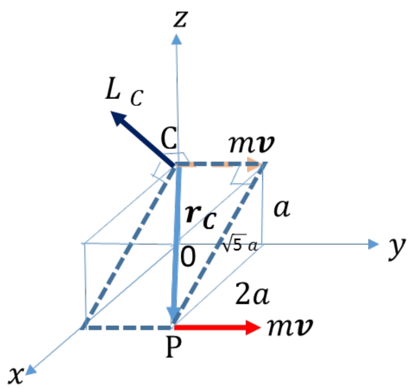
この場合の位置ベクトル$\mathbf{r}_C$ は右下の図のようになる。

$\mathbf{L}_C = \mathbf{r}_C\times m\mathbf{v}$ なので、

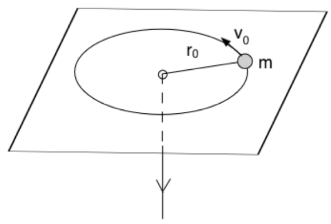
向き：右下の図のように、点線で囲まれた「$\mathbf{r}_C$と$m\mathbf{v}$が作る面」に垂直

大きさ：$|\mathbf{L}_C| = |\mathbf{r}_C||m\mathbf{v}|\sin\theta_C = (|\mathbf{r}_C|\sin\theta_C)|m\mathbf{v}|$

$= \sqrt{5}amv$



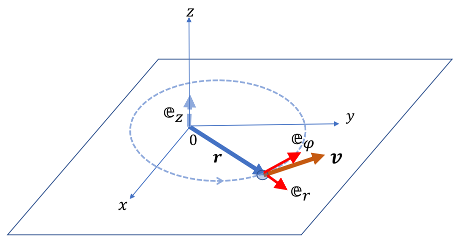
3.　右図のように、糸の一端に質量 m の質点をつけて滑らかな水平面上におき、他端を穴に通して引きながら質点を穴のまわりに回転させる。今、糸の長さが r_0 の時、角速度が ω_0 であった。長さが r_1 （$r_1 < r_0$）になった時の角速度 ω_1 を求めよ。



（解答例）質点には糸の張力$\mathbf{F}$が常に原点（穴）方向（動径方向）に働いている。明らかに$\mathbf{F}$は、原点から質点に向かう位置ベクトル$\mathbf{r}_0$に平行（反平行）である。したがって、張力による力のモーメントは０になる（この場合、張力は中心力になっている）。よって、原点のまわりの角運動量$\mathbf{L}$は保存する。$\mathbf{L}$の向きは、運動する平面に垂直で上向き。その大きさは、$|\mathbf{r}_0| = r_0$ の時、$|\mathbf{L}| = r_0 m v_0 \sin 90 = m r_0^2 \omega_0$. ここで、$\omega_0 = v_0/r_0$, 及び、円運動なので$\mathbf{r}_0$ と$\mathbf{v}_0$ は垂直であることを使った。長さが r_1 （$r_1 < r_0$）になった時の角運動量は$m r_1^2 \omega_1$ と書けるが、角運動量$\mathbf{L}$は保存するので、$m r_0^2 \omega_0 = m r_1^2 \omega_1$ となる。これより、

$\omega_1 = \left(\dfrac{r_0}{r_1}\right)^2 \omega_0$. $r_1 < r_0$ なので、半径が小さくなるほど角速度は大きくなる。

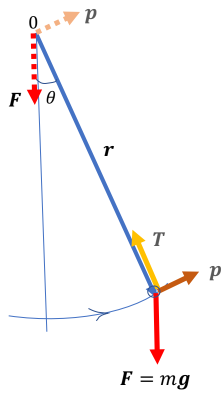
4.　中心力場では角運動量 $\mathbf{L}$ が保存するので質点は平面運動する （(5-4-7)式参照）。その平面に右図のような「2次元」の極座標を設定する。この時、位置ベクトル $\mathbf{r}$ の位置にある質点 (質量 m) の速度は(4-2-9)式 $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + (r\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi$ と書ける。このとき、$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ を計算し$\mathbf{L} = (m r^2 \dot{\varphi})\mathbf{e}_z$ となることを示せ。ただし、$\mathbf{e}_z$ は右図のように平面に垂直な方向（ z 方向）の単位ベクトルである。



（解答例）

$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (r\,\mathbf{e}_r) \times (\dot{r}\,\mathbf{e}_r + (m r \dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi) = r\dot{r}(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r) + m r^2 \dot{\varphi}(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi)$

$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r = 0$、$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z$ （右の図をみよ）なので、$\mathbf{L} = (m r^2 \dot{\varphi})\mathbf{e}_z$　が得られる。



5. 右図のように、質量の無視できる長さ l（$l = |\mathbf{r}|$）の糸の先端に質量 m の質点がつけられた単振子がある。重力加速度をgとして、この振り子の運動方程式を、回転の運動方程式(5-4-1) $\dfrac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$　から出発して求めよう。なお、糸はゆるむ事はなく、また、摩擦や空気の抵抗なども無視できるとする。（これは、<u>演習(7)の問題2-(1)で偏角方向の運動方程式を求めることに相当</u>する）

(1)　右図のように、質点が反時計回りに上昇して、鉛直方向と角度 θ になっている状態での「0点のまわりの角運動量 」$\mathbf{L}$ と「0点のまわりの力のモーメント」 $\mathbf{N}$ の向きと大きさをそれぞれ求めよ。ただし、図の中で$\mathbf{T}$ は張力である。

（解答例）位置ベクトル$\mathbf{r}$は０点から質点に向かう方向（動径方向）にとる。質点に働く力は重力と張力であるから、系全体の力のモーメント$\mathbf{N}_{tot}$は「重力による力のモーメント$\mathbf{N}_g$」と「張力による力のモーメント$\mathbf{N}_T$」の和になる。すなわち、$\mathbf{N}_{tot} = \mathbf{N}_g + \mathbf{N}_T$.

しかし、張力$\mathbf{T}$は常に$\mathbf{r}$と平行なので、<u>「張力の作る力のモーメント$\mathbf{N}_T$」は常に０となる</u>。よって、<u>**系全体の力のモーメントとして重力による力のモーメント$\mathbf{N}_g$のみを考えれば良い。**</u>（注：もし、0点以外の点のまわりの力のモーメントを採用すると、張力による力のモーメントも考えなければならなくなり複雑になる。）

$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ の向きは紙面に垂直で手前に向かう方向 (⊙)（これを、$\mathbf{e}_z$ 方向とする）、また、

$|\mathbf{L}| = |\mathbf{r}||m\mathbf{v}|\sin 90 = m l v = m l (l\dot{\theta}) = m l^2 \dot{\theta}$　なので、$\mathbf{L} = m l^2 \dot{\theta}\,\mathbf{e}_z$

問題文の$\mathbf{N}$は$\mathbf{N}_{tot}$の事であるので、$\mathbf{N} = \mathbf{N}_g = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\mathbf{g}$. その向きは、紙面に垂直で奥に向かう方向(⊗)（$-\mathbf{e}_z$ 方向）、また、$|\mathbf{N}| = |\mathbf{r}||m\mathbf{g}|\sin\theta = m l g \sin\theta$ なので、$\mathbf{N} = -m l g \sin\theta\,\mathbf{e}_z$

角度が大きくなるほど$\mathbf{N}$は大きくなる（$\mathbf{N}$は⊗方向を向いているので、回転力は時計方向（質点をつりあいの位置に戻す方向）に働き、角度が大きくなるほど、それは大きくなる。）

(2) $\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{N}$から、振り子の運動方程式 $\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\sin\theta$ を求めよ。

（解答例） $\frac{d\mathbf{L}}{dt}=ml^2\ddot{\theta}\mathbf{e}_z$ （$\dot{\mathbf{e}}_z=0$ である事を使っている）、 $\mathbf{N}=-mlg\sin\theta\mathbf{e}_z$ なので、$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{N}$ より

$(ml^2\ddot{\theta}+mlg\sin\theta)\mathbf{e}_z=0$ となる. $\mathbf{e}_z\neq 0$ なので、$(ml^2\ddot{\theta}+mlg\sin\theta)=0$. これより、

$\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\sin\theta$ が求まる。